

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Теоретично между две точки, лежащи върху дадена крива има безброй точки, които лежат върху същата крива. На практика при управление на преместването на работните органи /например на металорежещи машини или плотери/ броят на точките се ограничава от дискретността, с която работи изпълнителното устройство. Дискретността се определя от най-малкото разстояние /една дискрета/, което може да се отработи. Следователно две съседни точки ще бъдат отдалечени една от друга на разстояние една дискрета. В най-общия случай, ако стойността на едната координата на точка, лежаща върху зададената крива, съдържа цяло число дискрети, то стойността на втората ѝ координата е число с цяла и дробна част. При определяне на координатите дробната част се пренебрегва. В резултат получените точки образуват начупена линия, която се различава от зададената крива като най-голямото отклонение е най-много една дискрета.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Процесът на интерполиране се свежда до задачата: при известни координати на една точка $/X_i, Y_i/$ да се определят координатите на съседната точка $/X_{i+1}, Y_{i+1}/$.

Съседна точка е тази, която е отдалечена от дадената на разстояние една дискрета по една от двете координатни оси и лежи върху зададената крива, минаваща през точката $/X_i, Y_i/$.

Според метода на диференциалните нарастъци координатите $/X_{i+1}, Y_{i+1}/$ могат да се получат с използване на изразите:

$$X_{i+1} = X_i + \int_0^t x' dt$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \int_0^t y' dt$$

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

В горните изрази x' и y' са частните производни спрямо времето на функцията, описваща траекторията. За да се ускори изпълнението на операцията интерполиране се разработват алгоритми, при които изчисленията се свеждат до използване само на операциите сумиране и изваждане. Известно е, че интегрирането може да се замени със сумиране. Предните изрази се преобразуват във вида:

$$X_{i+1} = X_i + \sum_1^n x' \Delta t$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \sum_1^n y' \Delta t$$

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

След въвеждане на $n = t/\Delta t$ и $k = k'\Delta t$ изразите се преобразуват във вида:

$$X_{i+1} = X_i + \sum_1^n x'k \qquad Y_{i+1} = Y_i + \sum_1^n y'k$$

Стойността на параметъра t , съответно на n се избира така, че поне една от разликите $|X_{i+1} - X_i|$ и $|Y_{i+1} - Y_i|$ (стойността на члена, съдържащ сумата) да стане равна на единица.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Константата k определя мащаба, в който ще се използват нарастъците ΔX и ΔY . Нейният избор зависи от броя на разрядите на изчислителното устройство и от разрядността на нарастъците. Необходимо е изчислителното устройство да отговаря на условието броят на неговите разряди да е равен или по-голям от броя на разрядите на нарастъците. Ако изчислителното устройство е 8 разрядно, най-малката стойност на константата е $k = 1/256$. При нарастъци с по-малко разряди може константата да се увеличи като се умножи с число, равно на някоя от степените на 2. Тази възможност позволява да се ускори изчислителния процес когато и двата нарастъка ΔX и ΔY имат нули в най-старшия разряд. Ако се получи такъв случай, ΔX и ΔY се умножават едновременно по 2 до тогава, докато в най-старшия разряд на кое да е от тях се получи единица. Тази операция, имаща характер на нормализиране, може да се извършва преди всяко сумиране.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

В общия случай методът на диференциалните нарастъци се прилага върху произволна крива от втори ред със следното математическо описание:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

За определяне на частните производни спрямо времето уравнението се диференцира:

$$2Ax x' + Bx'y + Bxy' + 2Cyy' + Dx' + Ey' = 0$$

След разделяне на променливите се получава:

$$\frac{x'}{y'} = \frac{Bx + 2Cy + E}{2Ax + By + D}$$

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Последният израз може да се разглежда като резултат от почленното деление на изразите за стойностите на производните:

$$x' = (By + 2Cy + E)k'$$

$$y' = (2Ax + By + D)k'$$

Получените стойности на производните се заместват в изразите и се получава:

$$X_{i+1} = X_i + \sum_1^n (Bx + 2Cy + E)k$$

$$Y_{i+1} = Y_i + \sum_1^n (2Ax + By + D)k$$

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

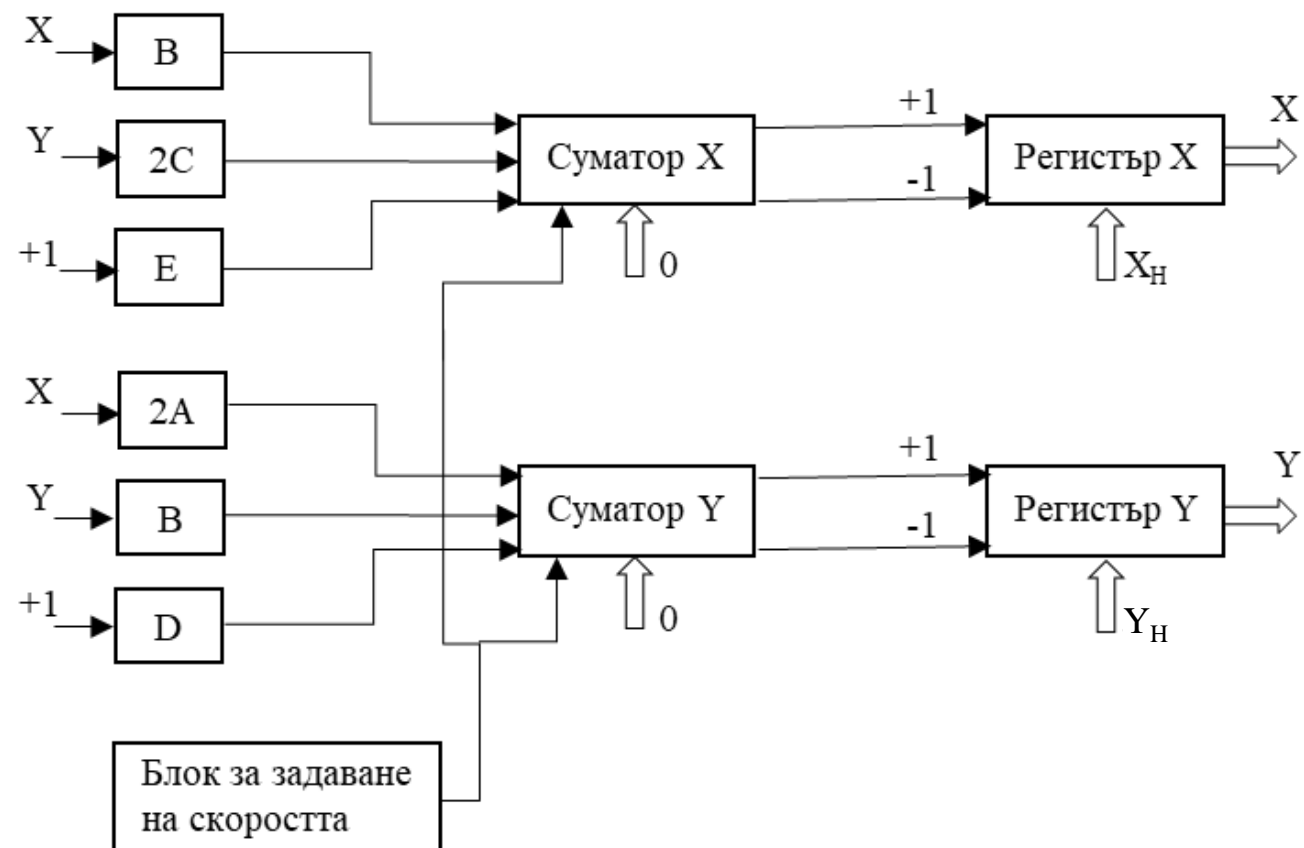
Като се използват получените изрази може да се синтезира блокова схема на интерполатор, който изчислява координатите на точките от крива от втори ред, описана с разгледаното уравнение.

Блоковата схема включва два регистъра за текущите стойности на координатите x и y , два суматора за изчисляване на нарастъците по координатните оси и мащабни преобразуватели – множители за коефициентите A , B , C , D и E .

При подходящ избор на координатна система някои от коефициентите се нулират, което опростява схемата на интерполатора.

Когато кривата е част от права, интерполацията е линейна, а ако е част от окръжност - кръгова.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ



ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Преди започване на изчисленията в мащабните преобразуватели се зареждат стойностите на съответните коефициенти, суматорите се нулират, а в регистрите се зареждат координатите на началната точка – X_H и Y_H .

Работата на интерполатора се управлява от блок за задаване на скоростта, който изработва тактова поредица с период Δt . При получаването на импулс към старото състояние на суматорите се прибавят стойностите, получени от мащабните преобразуватели. Когато в даден суматор се получи пренос или заем съдържанието на съответния регистър се променя с +1 или -1.

За управление на изпълнителните устройства се използват сигналите за пренос или заем – инкрементален изход, или съдържанието на регистрите – кодов изход.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

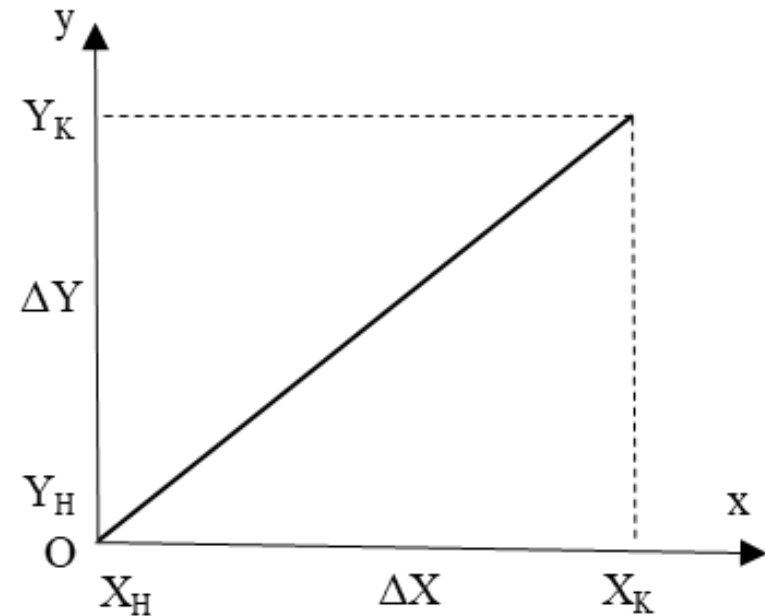
Линейна интерполация. Уравнението на права, преминаваща през две точки се представя с израза:

$$y = Y_H + \frac{Y_K - Y_H}{X_K - X_H} (x - X_H)$$

Ако $Y_H = X_H = 0$ се получава:

$$y' = \frac{\Delta Y}{\Delta X} x'$$

$$\frac{y'}{x'} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$



ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Последният израз може да се разглежда като получен чрез почленно деление на равенствата:

$$y' = \Delta Y k$$

$$x' = \Delta X k$$

Горните изрази се използват за изчисляване на координатите на съседните точки според математическите основи на метода на диференциалните нарастъци .

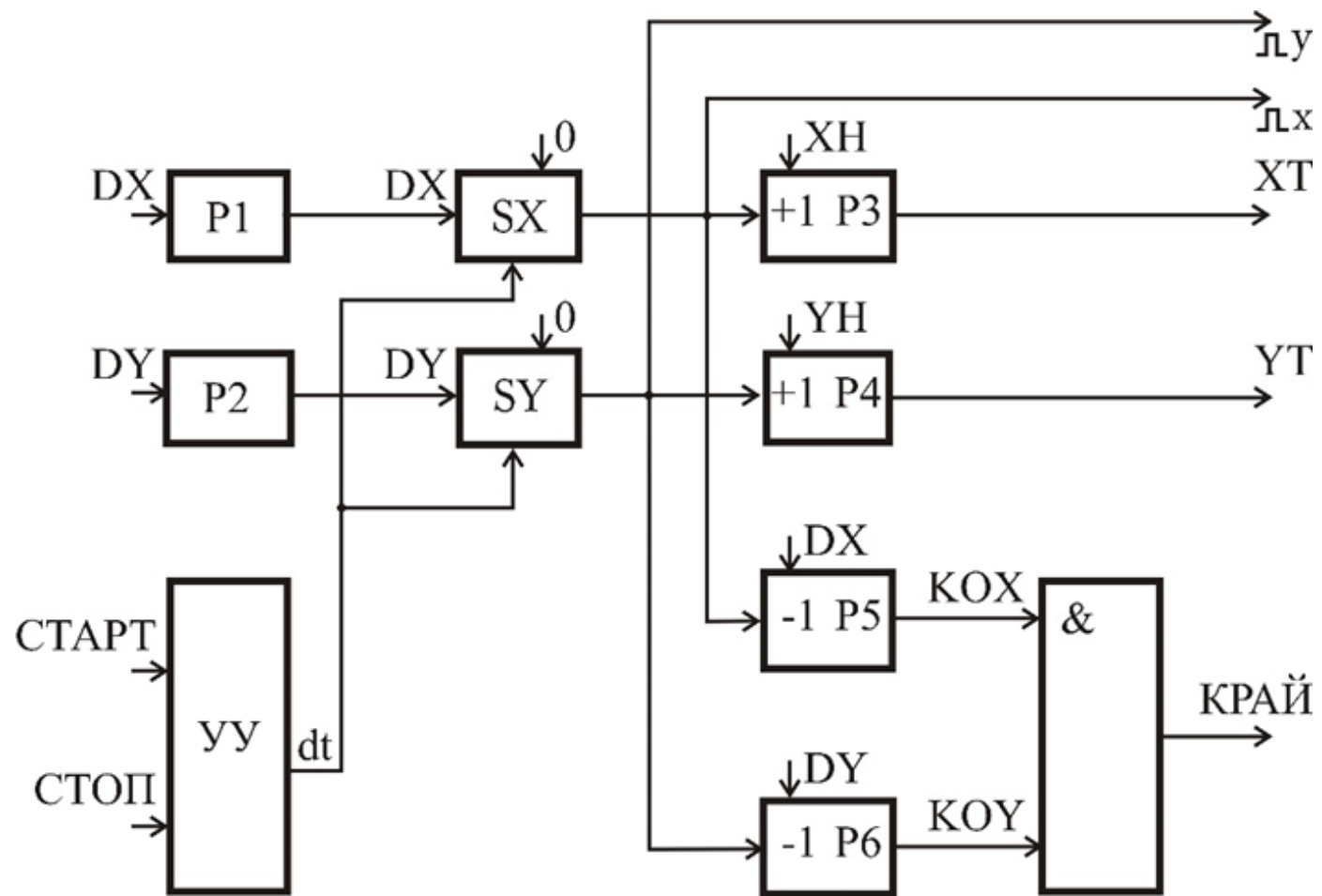
Съгласно него координатите на всяка следваща точка се получават като към стойностите на координатите на текущата точка се прибавят достатъчно малки нарастъци, пропорционални на разликите между координатите на началната и крайната точки, докато поне една от координатите нарасне с една цяла единица.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Горното правило може да бъде реализирано от изчислително устройство, което съдържа два суматора, шест регистъра и управляващо устройство. Два от регистрите /P1, P2/ се използват за съхраняване на нарастъците ΔX и ΔY , другите два /P3, P4/ са за съхраняване на координатите на текущата точка XT, YT и третите два /P5, P6/ съдържат число, което показва колко дискрети остават до края на интерполирането по съответната ос /KOX, KOY/. Преди започване на интерполацията се изчисляват стойностите на ΔX и ΔY и се зареждат в регистрите P1, P2, P5 и P6. В регистрите P3 и P4 се зареждат координатите на началната точка XH и YH. Суматорите SX и SY се нулират.

Интерполирането се извършва под управлението на управляващото устройство УУ, което при получаване на сигнал “старт” започва да изработва тактови импулси.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ



ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

При всеки тактов импулс суматорите SX и SY извършват сумиране на съдържанието си съответно със съдържанието на регистрите $P1$ и $P2$ - ΔX или ΔY . Ако се получи пренос съдържанието на регистрите $P3$ и $P4$, съдържащи текущите координати X_T и Y_T , се увеличава с единица, а съдържанието на регистрите $P5$ и $P6$ за край на интерполирането се намалява с единица. Когато съдържанието на $P5$ и $P6$ стане равно на нула се изработва сигнала “край”, с което се посочва, че интерполирането е достигнало до крайната точка $/X_K, Y_K/$.

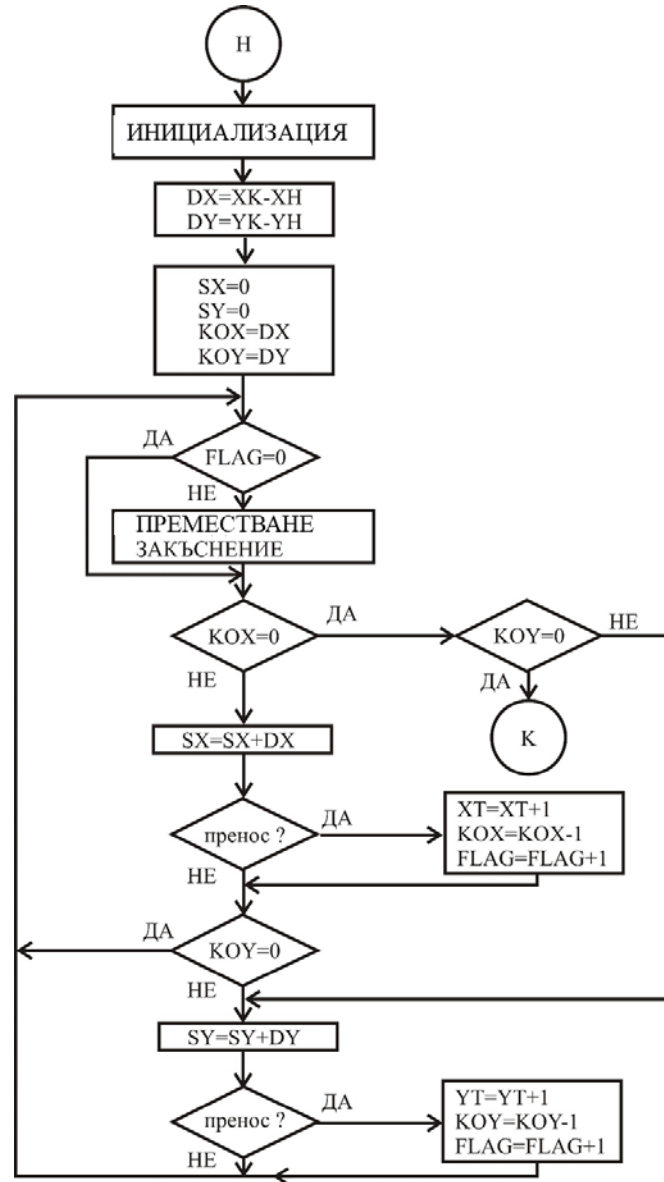
В резултат на интерполирането устройството изработва необходимата информация за точките, намиращи се върху дадена права, ограничена от начална точка $/X_H, Y_H/$ и крайна точка $/X_K, Y_K/$. Тази информация се предоставя в два вида: като последователност от стойности за координатите на междинните точки $/изходите X_T, Y_T/$ и като последователност от импулси за нарастъците на координатите на междинните точки $/изходите \Delta X, \Delta Y/$.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Обикновено интерполаторите изработват информация само от единия вид, като това се определя от типа на изпълнителното устройство.

При програмна реализация на метода функциите на регистрите и суматорите от блоковата схема на интерполатора ще се изпълняват от клетки от паметта. Клетките SX и SY са суматорите за съответните координатни оси. Клетките DX и DY изпълняват функцията на регистрите P1 и P2, които съдържат нарастъците ΔX и ΔY , а клетките KOX и KOY - на регистрите P5 и P6, съдържащи броя дискрети, които остават до края на интерполирането по съответната ос. Клетките XT и YT изпълняват функцията на регистрите P3 и P4, като съдържат координатите на текущата точка. Стойността на клетката FLAG показва дали е получен пренос.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ



ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Алгоритъмът включва следните действия:

1. Начално установяване (инициализация)
2. Подготовка на начални данни за изчисленията:
 - изчисляване и зареждане на $DX = X_K - X_H$, $KOX = DX$
 - изчисляване и зареждане на $DY = Y_K - Y_H$, $KOY = DY$
3. Подготовка на клетките:
 - нулиране на SX и SY
 - зареждане на $XT = X_H$, $YT = Y_H$
4. Проверка на стойността на $FLAG$
 - 4.1. При $FLAG = 0$ преход към точка 7
 - 4.2. При $FLAG = 1$ преход към точка 5
5. Преместване
6. Изработване на закъснение
7. Проверка за край

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

8. Прибавяне на нарастъка DX към суматора SX

$$SX = SX + DX$$

9. Проверка за пренос

9.1. При наличие на пренос:

- увеличаване на текущата координата по X с единица

$$XT = XT + 1$$

- намаляване на регистъра KOX с единица

$$KOX = KOX - 1$$

- увеличаване стойността на FLAG с единица

$$FLAG = FLAG + 1$$

- преход към точка 10

9.2. При липса на пренос:

- преход към точка 10

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

10. Прибавяне на нарастък DY към суматора SY .

$$SY = SY + DY$$

10.1. При наличие на пренос:

- увеличаване на текущата координата по Y с единица

$$YT = YT + 1$$

- намаляване на регистъра KOY с единица

$$KOY = KOY - 1$$

- увеличаване стойността на $FLAG$ с единица

$$FLAG = FLAG + 1$$

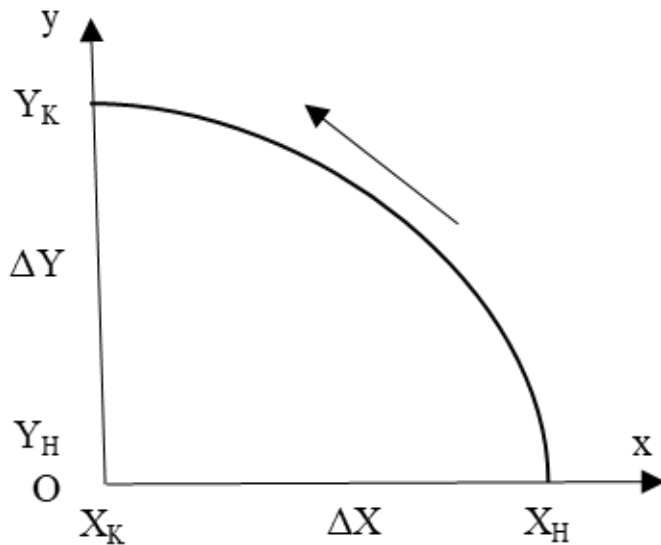
- преход към точка 4

10.2. При липса на пренос:

- преход към точка 4

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Кръгова интерполация. За опростяване на изчисленията интерполацията се изпълнява върху дъга с център, съвпадащ с началото на координатната система и само в първи квадрант. Всички останали случаи чрез подходяща обработка на входните и на изходните данни се привеждат към този случай.



Уравнението на окръжност с център началото на координатната система е:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

където x и y са координатите на текущата точка, а R е радиусът на отработваната дъга.

За прилагане на метода за диференциалните нарастъци е необходимо да се знаят производните x' и y' спрямо параметъра t .

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

За определянето им се диференцира уравнението на функцията и се получава:

$$2xx' + 2yy' = 0$$

или

$$\frac{y'}{x'} = -\frac{x}{y}$$

Последният израз може да се разглежда като получен чрез почленно деление на равенствата:

$$y' = kx$$

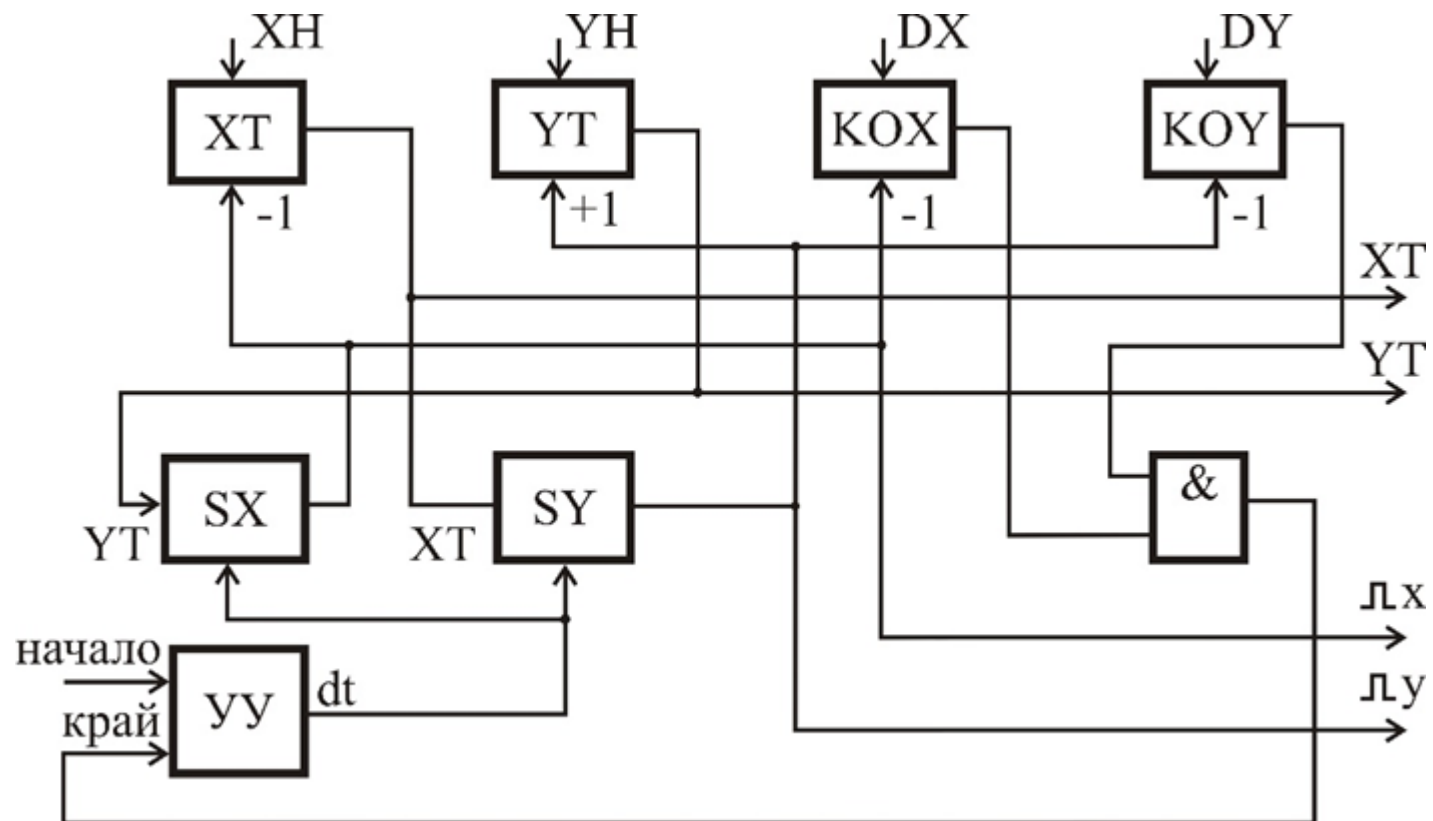
$$x' = -ky$$

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Получените изрази се използват за изчисляване на координатите на съседните точки според метода на диференциалните нарастъци.

Реализацията на метода може да се извърши от изчислително устройство, което съдържа два суматора, четири регистъра и управляващо устройство. Два от регистрите /P1, P2/ се използват за съхраняване на координатите на текущата точка XT и YT, а другите два /P3, P4/ съдържат число, което показва колко дискрети остават до края на интерполирането по съответната ос. Преди започване на кръговата интерполация се изчисляват стойностите на ΔX и ΔY и се зареждат в регистрите P3 и P4. В регистрите P1 и P2 се зареждат координатите на началната точка XH и YH. Суматорите SX и SY се нулират. Интерполирането се извършва под управлението на управляващото устройство УУ, което при получаване на сигнал за начало започва да изработва тактови импулси.

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ



ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

Блоковата схема на алгоритъма е същата като тази за линейна интерполация, но има промени при подчертаните действия:

1. Начално установяване (инициализация)

2. Подготовка на начални данни за изчисленията:

- изчисляване и зареждане на $DX = X_H - X_K$, $KOX = DX$

- изчисляване и зареждане на $DY = Y_K - Y_H$, $KOY = DY$

3. Подготовка на клетките:

- нулиране на SX и SY

- зареждане на $XT = X_H$, $YT = Y_H$

4. Проверка на стойността на $FLAG$

4.1. При $FLAG = 0$ преход към точка 7

4.2. При $FLAG = 1$ преход към точка 5

5. Преместване

6. Изработване на закъснение

7. Проверка за край

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

8. Прибавяне на стойността на YТ към суматора SX

$$SX = SX + YТ$$

9. Проверка за пренос

9.1. При наличие на пренос:

- увеличаване на текущата координата по X с единица

$$XТ = XТ + 1$$

- намаляване на регистъра KOX с единица

$$KOX = KOX - 1$$

- увеличаване стойността на FLAG с единица

$$FLAG = FLAG + 1$$

- преход към точка 10

9.2. При липса на пренос:

- преход към точка 10

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

10. Прибавяне на стойността на XT към суматора SY.

$$SY = SY + XT$$

10.1. При наличие на пренос:

- увеличаване на текущата координата по Y с единица

$$YT = YT + 1$$

- намаляване на регистъра KOY с единица

$$KOY = KOY - 1$$

- увеличаване стойността на FLAG с единица

$$FLAG = FLAG + 1$$

- преход към точка 4

10.2. При липса на пренос:

- преход към точка 4

ЛИНЕЙНА И КРЪГОВА ИНТЕРПОЛАЦИЯ ПО МЕТОДА НА ДИФЕРЕНЦИАЛНИТЕ НАРАСТЪЦИ

